**Diagonalización**

**Valores y vectores propios**

* Sea V un K-espacio de dimensión finita n, y sea f:V→V un endomorfismo de V. Siendo λ un escalar de K:
  + Se dice que un escalar λ es un **valor propio** o **autovalor** de f si existe un vector no nulo tal que **f(v)= λv**
  + Se dice que un vector v€V es un **vector propio** o **autovector** si existe λ tal que **f(v)=λv**

**Subespacio de vectores propios**

* Sea A€Mn(K) es la matriz asociada a f respecto de una base B. (f)B,B
* Se cumple que **Vλ={v€V | f(v)=λv}** es un subespacio de V, para cualquier escalar λ.
  + Cuando λ es un valor propio de f, este subespacio se llama **subespacio propio** asociado al valor propio λ.
* Además, **dim(Vλ) = n - r(A - λIn)**
  + Esto es debido a que Vλ = Ker(f-λidV), donde *λidV*es la ap.lin. definida por λidV(v)=λv para todo v.
  + Además, ya que (f-λidV)B,B) = A - λIn, se verifica que:
  + dim(Vλ) = dim(Ker(f − λidV )) = n − dim(Im(f − λidV )) = n − r(A − λIn).
* Se cumple que λ es un valor propio de f si y solo si **|A-**λ**In|=0**.
  + Si este determinante es distinto de 0, r(A-λIn)=n, y dim(Vλ)=0

**Anillo de polinomios K[x][[1]](#footnote-0)**

* Dado un cuerpo K, un **polinomio** en la indeterminada x con coeficientes en K es una expresión de la forma **f(x) = a0 + a1x + a2x2 + … + anxn** .
* El exponente de x del último elemento no nulo se denomina **grado**, denotado por ∂f(x), . El valor de ai para este elemento es el **coeficiente principal**.
* Un polinomio donde todo ai=0 es el polinomio cero.
* Un polinomio de grado 0 se llama polinomio constante.
* Un polinomio donde el coeficiente principal es 1 es mónico.

**Suma y producto en K[x]**

* Sean dos polinomios en K[x]: f(x)=a0+...+anxn y g(x)=b0+...bmxm
* Suponemos que n>=m sin perder generalidad. Si n>m, definimos bm+1=bm+2=...bn.
* La **suma de f(x)+g(x)** será otro polinomio del tipo (a0+b0) + (a1+b1)x + … + (an+bn)xn
* El **producto de f(x)g(x)** será (a0b0) + (a0b1 + a1b0)x + (a0b2+a2b0+a1b1)x2 … + (aib0)xn
  + Pudiendo ser ai o bi 0.
  + En el producto, se toman las combinaciónes de a y b cuya **suma de grados** sea igual al exponente de x en ese término. Ejemplo: en x2, se toman a0b2  (0+2=2) y a1b1(1+1=2).

**Algoritmo de división en K[x]**

* Sean f(x) y g(x) polinomios con coeficientes en K, siendo g(x)!=0.
* Existen polinomios únicos q(x), r(x) tales que f(x) = g(x)\*q(x) + r(x)
  + Demostración: Si ∂f(x)<∂g(x), el resultado se cumple para q(x)=0 y r(x) = f(x).
  + Si ∂f(x)=∂g(x), demostramos por inducción. Si n=0, q(x)=a0b0-1 y r(x)=0.
    - Luego, si n>0, suponemos que el resultado es cierto para aquellos polinomios cuyo grado es menor que n.
    - El polinomio f1(x)= f(x)-anbm-1xn-mg(x), cuyo grado es menor que n. Entonces, existen polinomios q1(x) y r1(x) para f1(x).
    - Así pues, f(x) = anbm-1xn-mg(x) + f1(x)
  + Tomamos q(x) = anbm-1xn-m + q1(x), y r(x) = r1(x). Con estos valores, se cumple que f(X) = q(x)g(x)+r(x).
* Demostramos ahora que son únicos:
  + Supongamos ahora que, f(x) = q1(x)g(x) + r1(x) = q2(x)g(x) + r2(x).
  + Se cumple que (q1-q2)g(x) = r2(x)-r1(x).
    - Entonces, ∂[(q1(x) − q2(x))g(x)] =∂(r2(x) − r1(x))
  + Si q1!=q2, entonces q1-q2!=0. En ese caso, ∂[(q1(x) − q2(x))g(x)] ≥ ∂g(x).
  + Entonces, ∂(r2(x) − r1(x))≥ ∂g(x). Sin embargo, conocemos que ∂(r2(x) − r1(x)) ≤max{∂r1(x), ∂r2(x)} < ∂g(x).
  + Entonces, es imposible que q1!=q2.

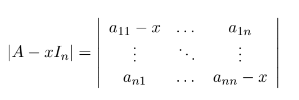
**Evaluación**

* Llamaremos **evaluación**  de f(x) en α al elemento f(α)=a0+a1α + anαn.
* Diremos que α es una raíz de f(x) si f(α)=0.

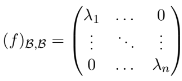
**Teorema del resto**

* El **resto** de la fivisión de f(x) por (x-α) es **f(α)**
* Demostración: Por el algoritmo de la división. Evaluamos f(α) = (α-α)q(α) + r(α) = r(α) = r.
  + f(x)=(x-α)q(x)+r(x)= con r(x)=0 o con el grado de x menor que el de x-a. Entonces, r(x)=r es un escalar que pertenece a k.
* **Teorema del factor:** (x-α) divide a f(x) si y solo si f(α)=0, luego si α es raíz de f(x). Esto es debido al teorema del resto.
* Diremos que α es una raíz de f(x) de **multiplicidad** **m** si (x-α)m divide a f(x), pero (x-α)m+1 no.[[2]](#footnote-1)

**Polinomio característico**

* Siendo A la matriz asociada de un endomorfismo f respecto de una base B:
* El siguiente determinante es un polinomio de grado n con coeficientes en K llamado **polinomio característico de A** (o de f), denotado por **pc(f)**.
  + Es el mismo polinomio para cualquier base, por lo que se puede cambiar A por cualquier matriz semejante.

**Diagonalizabilidad**

* Un endomorfismo es **diagonalizable** si existe una base de V respecto de la cual la matriz asociada a f es una matriz diagonal (todo 0s excepto la diagonal).[[3]](#footnote-2)
* Esto ocurre sólo si f(vi)=λivi (para todo i en [1,n]. Entonces, un endomorfismo es diagonalizable si la **base** está **formada por vectores propios**.
  + Para que sea diagonalizable un endomorfismo, debemos encontrar n vectores propios linealmente independientes.
* Además, una matriz cuadrada es diagonalizable si es semejante a la matriz diagonal.
* Sea f:V→V un endomorfismo y λ1,λ2,...,λr sus autovalor

**Teoremas de valores propios** (siendo α y β valores distintos)

* Vα ^ Vβ = {0}.[[4]](#footnote-3)
  + Si existiese v€Vα ^ Vβ, f(v) = α\*v = β\*v. Sin embargo, α y β son distintos.
* Si Bα es una base de Vα y Bβ es una base de Vβ, entonces la unión Bα U Bβ es una base de Vα + Vβ. Ademais, dim(Vα + Vβ) = dim(Vα) + dim(Vβ).
  + Isto é debido a que Vα + Vβ = <Bα ∪ Bβ>
* Dim(Vλ1 + · · · + Vλs) = dim(Vλ1) + · · · + dim(Vλs).

**Teoremas de endomorfismos**

* Si f: V→V es un endomorfismo de V y λ es un valor propio de multiplicidad m, entonces **dim(Vλ) <= m**
  + Si {v1, …, vs} es una base de Vλ y la completamos a una base de V, B={v1,...,vs,...,vn}, se tiene que:
  + 
  + Entonces, el polinomio característico de f es Como la multiplicidad de λ en pc(f) es m, se deduce que s<=m.
* **Corolario:** Si λ es un valor propio simple, dim(Vλ) = **1**.

1. nada de esto entrou nunca [↑](#footnote-ref-0)
2. hasta aquí. [↑](#footnote-ref-1)
3. entra en todos os exámenes: probar que f es diagonalizable, encontrar una base tal que (f)B,B es diagonal [↑](#footnote-ref-2)
4. entrou nun examen [↑](#footnote-ref-3)